I) ÁLGEBRA

A) MATRICES
   1) Operaciones con Matrices: Suma. Resta, Multiplicación.
   2) Cálculo de la matriz Adjunta, Traspuesta e Inversa de una matriz.
   3) Cálculo de rango de una matriz.

B) DETERMINANTES.
   1) Cálculo de determinantes de matrices cuadradas.
   2) Propiedades de los determinantes.

C) RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES
   1) Discusión de sistemas (Aplicación de Rouché-Frobenius).
   2) Resolución de sistemas (Gauss o Cramer).

II) GEOMETRÍA

A) VECTORES
   1) Vectores linealmente independientes, base de R^3.
   2) producto escalar, producto vectorial y producto mixto. Aplicaciones.
   3) Ángulo que forman dos vectores.

B) ECUACIONES
   1) Ecuaciones de la recta.
   2) Ecuaciones del plano.

C) POSICIONES RELATIVAS
   1) Posición relativa entre dos rectas.
   2) Posición relativa entre dos planos.
   3) Posición relativa entre recta y plano.

D) CALCULOS
   1) Distancia entre dos rectas, dos planos, de recta a plano.
   2) Ángulo que forman dos rectas, dos planos, recta y plano.
   3) Punto de corte entre dos rectas, recta y plano.
   4) Recta intersección entre dos planos.

III) ANÁLISIS

A) CÁLCULO DE LÍMITES.

B) DERIVADAS.
   1) Cálculo de derivadas.
   2) Aplicación.

C) FUNCIONES
   1) Dominio
   2) Asíntotas.
   3) Continuidad.
   4) Derivabilidad.
   5) Calculo de extremos relativos.
   6) Puntos de inflexión

D) INTEGRALES
   1) Cálculo de integrales
   2) Aplicación.

Los contenidos del examen de septiembre serán según el resumen anterior.
A continuación se pone un mero ejemplo de cada uno de los contenidos. En el examen los ejercicios serán DISTINTOS pero similares.

MATRICES

- **Operaciones con Matrices: Suma. Resta, Multiplicación.**

Junio 08.

Opción A. a) *(1,5 puntos)* Sean A, B, I las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$.

a) $$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&-2\lambda+1&-2\lambda\\-2\lambda+1&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Igualando, por ejemplo, los elementos a_{13}: $-2\lambda=-4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\lambda=2}$.

Ahora basta comprobar que para $\lambda=2$ los restantes valores de ambas matrices son iguales.

- **Cálculo de la matriz Adjunta, Traspuesta e Inversa de una matriz.**

Septiembre 08.

Opción A. *(2,5 puntos)* Hallar una matriz $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ de orden 2 tal que $A^{-1}X\,A=B$

$A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}X\,A=B \quad\Leftrightarrow\quad X\,A=A\cdot B \quad\Leftrightarrow\quad X=A\cdot B\cdot A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}: $\qquad |A|=\begin{vmatrix}3&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-3+2=-1$

$$A^t=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\left(\text{Adj }A^t\right)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{\left(\text{Adj }A^t\right)}{|A|}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}9&11\\-6&-7\end{pmatrix}}$$

DETERMINANTES

- **Propiedades de los determinantes.**

b) *(1 punto)* Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3×3 tiene como determinante -3. Determine el determinante de la matriz $B+B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B.

Si B es simétrica entonces $B^t = B \Rightarrow \left|B+B^t\right| = |2B| = 2^3|B| = 8.(-3) = -24$

- **Inversa de una matriz por adjuntos**

Junio 12.

a) *(1,5 puntos)* Comprueba que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

M es inversible si $|M| \neq 0$: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+4+1-2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ M tiene inversa.

- Calculemos la matriz adjunta (AdjM) y después la traspuesta de la adjunta $(\mathrm{AdjM})^t$:

$a_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $a_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $a_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$; $a_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$a_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $a_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Luego $(\mathrm{AdjM}) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathrm{AdjM})^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Por último: $M^{-1} = \dfrac{(\mathrm{AdjM})^t}{|M|} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 3/5 & 1/5 \\ 1 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

DISCUSIÓN DE SISTEMAS

- **Aplicación Rouché-Frobenius y resolución de sistemas por Gauss**

1 a) *(1,5 puntos)* Determine para qué valores de m el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} mx+2y+6z&=0 \\ 2x+my+4z&=2 \\ 2x+my+6z&=m-1 \end{aligned}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 4 & 2 \\ 2 & m & 6 & m-1 \end{array}\right)$. Comparemos sus rangos:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 + 12m + 16 - 12m - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2$$

· Para $m \neq \pm 2$: $\quad$ rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

$$m = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ rgA=2 y rgB=3➔sistema incompatible

$$m = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{array}\right)$$ rgA=2 y rgB=3➔sistema incompatible

a) *[1,5 puntos]* Discutir y resolver en función de los valores del parámetro *m* el sistema lineal $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + m^2y + m^2z = 1 \\ mx + my + m^2z = 1 \end{cases}$

Estudiemos los valores del parámetro para los que el rango de A es el máximo posible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4 + m^3 + m^2 - m^3 - m^3 - m^3 = m^4 - 2m^3 + m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2\left(m^2 - 2m + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m^2(m-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \ , \ m = 1$$

· Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$: $\quad$ rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Resolvemos

$$\text{Si } m \neq 0, 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-m^2 & m-m^2 & m-1 \\ 0 & 0 & m-m^2 & m-1 \end{array}\right)$$

$(m-m^2)z = m-1$

$$z = \frac{m-1}{(m-m^2)} = \frac{m-1}{-m(m-1)} = \boxed{-\frac{1}{m}}$$

$(m-m^2)y + (m-m^2)z = m-1$

$$(m-m^2)y - (m-m^2)\frac{1}{m} = m-1$$

$$(m-m^2)y = (m-m^2)\frac{1}{m} + m - 1 =$$

$$\frac{m - m^2 + m^2 - m}{m} = 0$$

$\boxed{y = 0}$

$x + y + z = 1$

$$x - \frac{1}{m} = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{m} = \boxed{\frac{m+1}{m}}$$

Qué pasa si m=0

$$m = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ Rango A=1, Rango A*=2 por RF, sistema incompatible

Qué pasa si m=1

$$m=1\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$$ Rango A=Rango A*=1 por RF, sistema compatible indeterminado

Solución con dos grados de libertad (nº incógnitas-rango A)

$x+y+z=1$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=1-\mu-\lambda\\y=\mu\\z=\lambda\end{array}}$$

GEOMETRÍA

Septiembre 06. a) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores $\vec{u}=(2,0,9)$, $\vec{v}=(3,-1,2)$, $\vec{w}=(5,-1,4)$. [0,75 puntos]

b) Dados los planos: $\pi_1: 3x-y+2z+1=0$ y $\pi_2: 2x+y-5z-1=0$, determinar el ángulo que forman. [1,75 puntos]

a) $\begin{vmatrix}2&0&9\\3&-1&2\\5&-1&4\end{vmatrix}=-8-27+45+4=14\neq 0$ luego los vectores son linealmente independientes.

b) el ángulo que forman dos planos es el ángulo que forman sus vectores normales, hallaremos su producto escalar.

$$|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|=|\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2|\cos\alpha\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{|6-1-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{30}}=\frac{5}{\sqrt{420}}\cong 0{,}243975\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha=75^0\ \ 52'\ \ 43''}$$

ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS Y POSICIONES RELATIVAS

Junio 04. Sean los puntos $A(2,3,0)$ y $B(-2,1,4)$. Determinar:

a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento AB [0,5 puntos].

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados [1 punto].

c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen [1 punto]

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

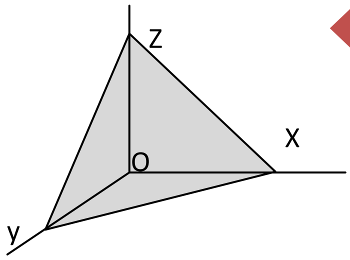
a) El vector $\overline{AB}=(-4,\ -2,\ 4)$ es un vector normal del plano. Su ecuación es por tanto: $-4x-2y+4z+D=0$.

Como el plano π pasa por el punto medio del segmento AB, $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=(0,2,2)$:

$-4*0-2*2+4*2+D=0 \qquad D=-4$.

Por lo tanto, la ecuación del plano π es: $-4x-2y+4z-4=0$

b) El tetraedro tiene por vértices el origen O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:



• Con OX: $\begin{cases} 2x+y-2z+2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}(-1,0,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OX}}=(-1,0,0)$

• Con OY: $\begin{cases} 2x+y-2z+2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Y}(0,-2,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OY}}=(0,-2,0)$

• Con OZ: $\begin{cases} 2x+y-2z+2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Z}(0,0,1) \Rightarrow \overline{\mathrm{OZ}}=(0,0,1)$

Por tanto: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overline{\mathrm{OX}},\overline{\mathrm{OY}},\overline{\mathrm{OZ}}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 2\right|=\frac{1}{3}\ \mathrm{u}^3$

c) La recta está caracterizada por el origen de coordenadas y el vector direccional $\overline{AB}$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{-4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$$

2 a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano que es paralelo a la recta

$$r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-3}{4}$$

y que contiene los puntos $P=(1,1,1)$ y $Q=(3,5,0)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 2x-y & =-1 \\ 2x-z & =-4 \end{cases}$$

$$r':\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

SOLUCIÓN.

a) El vector direccional de la recta es uno de los que determina el plano: $\vec{u}=(2,1,4)$. También el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,4,-1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 1 & 4 \\ z-1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -x+1+8y-8+8z-8-2z+2-16x+16+2y-2=0 \Leftrightarrow 17x-10y-6z-1=0$$

b) Obtengamos las coordenadas de los vectores direccionales de ambas rectas:

· $r:\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ z=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(1,2,2)$ · $r': \vec{v}=(2,-1,2)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{|2-2+4|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\frac{4}{3\cdot 3}=\frac{4}{9} \Rightarrow \alpha=\arccos\frac{4}{9}\simeq 63^\circ\,36'\,44''$$

Junio 08.

Opción A. Considerar la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+4y+4z=5$.

a) *(1 punto)* Estudiar la posición relativa de r y π.

b) *(1,5 puntos)* Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a r.

a) Vector direccional de la recta r: $\vec{u} = (2,-5,4)$. Vector normal al plano π: $\vec{n} = (2,4,4)$

Como $\vec{u} \cdot \vec{n} = 4-20+16=0 \Rightarrow$ entonces son perpendiculares luego la recta es paralela al plano o está contenida en él.

Un punto de la recta es $P(1,-5,-3)$. Veamos si está también en el plano: $2-20-12 \neq 5 \Rightarrow$ el punto no pertenece al plano y, por tanto, la recta y el plano son paralelos

b) El plano π_1 está determinado por un punto de r, por ejemplo $P(1,-5,-3)$, un vector direccional de r, por ejemplo $\vec{u} = (2,-5,4)$, y un vector normal a π, por ejemplo $\vec{n} = (2,4,4) \approx (1,2,2)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -18(x-1)+9(z+3)=0 \Leftrightarrow -18x+18+9z+27=0 \Leftrightarrow -18x+9z+45=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x-z-5=0}$$

Septiembre 13.

Dadas las rectas: $r: \frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ con $k \neq 0$, $s: \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

a) *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de k.

b) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de k para los que las rectas son perpendiculares?

a) $\vec{u} = (k,2,-1)$ es un vector direccional de r y $P(1,2,0)$ un punto de la misma.

Busquemos un vector direccional de s:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x-y \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x-2x+1=-x+1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \text{dos puntos de s: } \left| \begin{array}{l} A(0,-1,1) \\ B(1,1,0) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-1)$$

· Si $k=1$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow$ r y s son coincidentes o paralelas. Como $P \notin s$ pues sus coordenadas no verifican las ecuaciones de s, las dos rectas son paralelas.

· Si $k \neq 1$: las rectas se cruzan o se cortan. Consideremos un vector de origen en r y extremo en s: $\overrightarrow{PB} = (0,-1,0)$ y veamos si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PB}$ son linealmente dependientes (las rectas se cortan) o independientes (las rectas se cruzan):

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-k \neq 0 \quad \forall k \neq 1 \Rightarrow \text{ los vectores son independientes y por tanto las rectas se cruzan.}$$

b) Las rectas son perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k+4+1=0 \Rightarrow k=-5$

A. 2. a) *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: 2x+3y-z=1$$

$$\pi': \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\mu \\ z=-1+2\lambda+\mu \end{cases}$$

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto $P=(0,1,1)$ y es perpendicular al plano π'. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

a) Escribamos el plano π' en forma general: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -z-1+2y-2+2x-y+1 = 2x+y-z-2=0$

En el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ se tiene: $rgA = rgB = 2 \;\Rightarrow$ los planos se cortan en una recta.

b) La recta queda determinada por el punto $P(0,1,1)$ y un vector normal al plano π': $\vec{n}=(2,1,-1)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2y-2 \\ -x=2z-2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

- **Distancia entre dos rectas, dos planos, de recta a plano.**

Calcular la distancia que hay entre ambos planos π y σ : $\pi \equiv 2x+2y+z-3=0 \qquad \sigma \equiv 2x+2y+z+1=0$

Los planos π y σ son paralelos con el mismo vector normal.. La distancia entre ambos es:

$$d = \left| \frac{D-D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right| = \left| \frac{-3-1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \right| = \frac{4}{3}$$

- **Ángulo que forman dos rectas, dos planos, recta y plano.**

Septiembre 07. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$, $s \equiv x=y+4=2z-8$

a) Comprobar que se cortan. [1,5 puntos]

b) Hallar el ángulo que forman. [1 punto]

a) Obtendremos un vector $\bar{u}$ direccional de r y un vector $\bar{v}$ direccional de s que deben ser linealmente independientes (sus coordenadas no deben ser proporcionales). Asimismo, un vector $\vec{AB}$ cuyo origen sea un punto de r y cuyo extremo sea un punto de s que deberá ser linealmente dependiente de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

X Dos puntos de r son: $\begin{cases} z=4: \; x=0\;,\; y=-4 \;\Rightarrow\; A(0,-4,4) \\ z=0: \; x=-4\;,\; y=4 \;\Rightarrow\; P(-4,4,0) \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{AP}=(-4,8,-4) \;\approx\; \bar{u}=(1,-2,1)$

X La ecuación de s viene dada en forma continua: $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-4}{1/2}$ por lo que un punto es $B(0,-4,4)$ y un vector direccional $\bar{v}=(2,2,1)$

Puesto que las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ no son proporcionales, los vectores no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las rectas se cortan o se cruzan. Como además tienen un punto común: $A \equiv B$, las rectas se cortan.

b) El ángulo que forman las rectas es el ángulo agudo que forman sus vectores direccionales. Se tiene:

$$\cos\alpha=\left|\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}\right|=\left|\frac{2-4+1}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+4+1}}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{6}\cdot 3}\right|=\frac{1}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{18}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{\sqrt{6}}{18}\simeq 82^{\circ}\,10'\,44''$$

- **Punto de corte entre dos rectas, recta y plano.**

> **Opción B.** a) *(1,25 puntos)* Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi\equiv x+y+z=3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π.

La recta está determinada por el origen y por un vector normal al plano $\vec{n}=(1,1,1)$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow\boxed{x=y=z}$$

El punto de corte de la recta y el plano es: $x+x+x=3\Rightarrow x=1\Rightarrow x=y=z=1$ es decir: $\boxed{Q(1,1,1)}$.

ANÁLISIS

CÁLCULO DE LÍMITES

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$ Simplificando factores**

Utilizar el cambio de variable $t^3=1-x$ para calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{1/3}-1}{x}$

$t^3=1-x\Rightarrow x=1-t^3$ y cuando $x\to 0\Rightarrow t^3\to 1\Rightarrow t\to 1$

Se tiene: $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{1/3}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{1-t^3}=\frac{0}{0}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{-(t-1)(t^2+t+1)}=-\frac{1}{3}$$

- **Indeterminación $\infty-\infty$ con radicales, multiplicar por el conjugado**

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+3x-2}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2x}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

- **Indeterminación $\frac{0}{0}$ con radicales, multiplicar por el conjugado**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

- **Indeterminación** 1^{∞} $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \quad \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)(f(x)-1)}$

Calcule el límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x}$

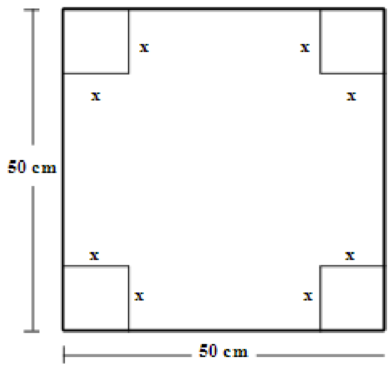
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{x+6}{x+2}-1\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{x+6-x-2}{x+2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{4}{x+2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x}{x+2}\right)}=e^{12}$$

Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=1^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{6}\cdot\frac{6}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{6x^2}{x^2+2x-3}}=e^{6}$$

A) **DERIVADAS.**
   1) Cálculo de derivadas.
   2) Aplicación.

(2,5 puntos) Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide 50 cm. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado x con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tapa. ¿Cuál debe ser el lado x del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



SOLUCIÓN.

La función volumen es: $V(x)=(50-2x)^2\cdot x = 2500x-200x^2+4x^3$

$V'(x)=2500-400x+12x^2=0 \quad\Rightarrow$

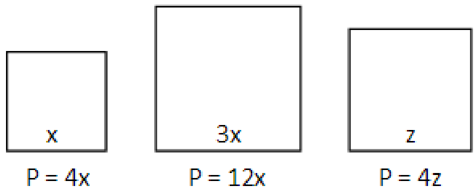
$$\Rightarrow\quad x=\frac{400\pm\sqrt{160000-120000}}{24}=\frac{400\pm 200}{24}=\begin{cases}25\\ \frac{25}{3}\end{cases}$$

$V''(x)=-400+24x \quad \left| \begin{array}{l} V''(25)>0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo} \\ V''(25/3)<0 \;\Rightarrow\; \text{máximo} \end{array} \right|$

luego para que el volumen de la caja sea máximo, deben cortarse cuadrados de $\frac{25}{3}=8,3$ cm en cada esquina.

(2 puntos) Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

SOLUCIÓN



Tenemos:

$$4x + 12x + 4z = 1248 \;\Rightarrow\; z = \frac{1248 - 16x}{4} = 312 - 4x$$

La función que debe ser mínima es:

$$f(x) = x^2 + (3x)^2 + (312 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 97344 + 16x^2 - 2496x = 26x^2 - 2496x + 97344$$

$f'(x) = 52x - 2496 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2496}{52} = 48$ y como $f''(x) = 52 > 0 \;\Rightarrow$ para $x = 48$ la suma de las áreas es mínima.

Por lo tanto, el lado del primer cuadrado debe ser de 48 metros, el del segundo 144 metros y el del tercero 120 m.

B) FUNCIONES

1) Dominio
2) Asíntotas.
3) Continuidad.
4) Derivabilidad.
5) Calculo de extremos relativos.
6) Puntos de inflexión

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$

b) *(0,5 puntos)* Estudie si la función $f(x)$ es continua. Si no lo es, determine los puntos de discontinuidad.

c) *(1,5 puntos)* Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

a) $x^2 - x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \;\Rightarrow\; D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) La función tiene dos puntos de discontinuidad (con asíntota vertical) en $x = -2$ y en $x = 3$.

c) · Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x - 6)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - x - 6)^2 - (-2x+1)2(x^2 - x - 6)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^4} \;\Rightarrow\; f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} \text{ es un máximo de la función.}$$

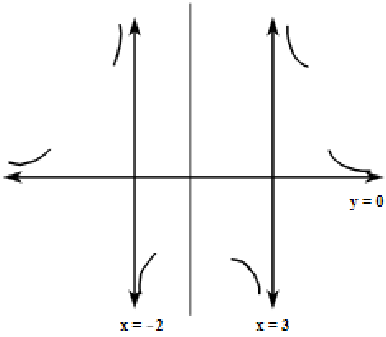
· Asíntotas:

$x=-2$ y $x=3$ son dos asíntotas verticales de la función pues $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x^2-x-6}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x^2-x-6}=\infty$.

Estudiemos la posición de la curva respecto a sus asíntotas:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{x^2-x-6}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x^2-x-6}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x^2-x-6}=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to3^+}\frac{1}{x^2-x-6}=+\infty$$



$y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-x-6}=0$:

Posición relativa: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-x-6}=0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-x-6}=0^+$

Junio 07.

1. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$.

a) [0,5 puntos] Calcular su dominio.
b) [1 punto] Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) [1 punto] Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan.

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $\left\{\mathbf{D(f) = R - \left\{\frac{x}{x} + 1 = 0\right\} = R - \{-1\}}\right\}$

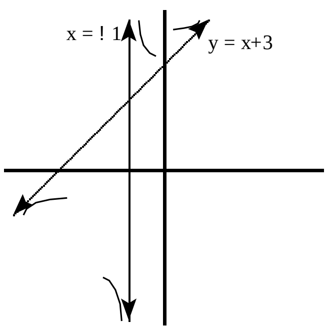
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2\,(x+2)\,(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)\left[2\,(x+1)-(x+2)\right]}{(x+1)^2}=\frac{(x+2)\,x}{(x+1)^2}$$

f' > 0 | f' < 0 | f' > 0
! 2 | 0

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ y decreciente en $(-2,0)$.

c) • Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$.



Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+2)^2}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{(x+2)^2}{x+1}=+\infty$$

• Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1}=\frac{x^2+4x+4}{x+1}=x+3+\frac{1}{x+1} \quad\Rightarrow\quad y=x+3 \text{ es una asíntota oblicua.}$$

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0^- \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0^+$$

A) INTEGRALES

1) Cálculo de integrales
2) Aplicación.

- **Integrales con cambio de variable**

Usando el cambio de variable $t = cos(x)$, calcule:

$$\int \frac{cos^2(x)}{sen(x)}dx$$

$$t=\cos x \quad \Rightarrow \quad dt=-\operatorname{sen}x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx=-\frac{dt}{\operatorname{sen}x}$$

$$I=\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x}dx=-\int \frac{t^2}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{dt}{\operatorname{sen}x}=-\int \frac{t^2}{1-\cos^2 x}dt=-\int \frac{t^2}{1-t^2}dt=\int \frac{t^2}{t^2-1}dt=(1)$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2-1 \\ \cline{2-2} -t^2+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t^2-1}=1+\frac{1}{t^2-1}$$

$$(1)=\int dt+\int \frac{1}{t^2-1}dt=t+\int \frac{1}{t^2-1}dt=(2)$$

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}=\frac{At-A+Bt+B}{(t+1)(t-1)}=\frac{(A+B)t-A+B}{t^2-1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow B=\frac{1}{2}\ ,\ A=-\frac{1}{2}$$

$$(2)=t-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt=t-\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t-1)+C=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C=t+\ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}+C=$$

$$=\cos x+\ln\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}+C$$

- **Integrales partes**

Calcule la integral $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}x}\ \operatorname{sen}x\cos x\,dx$ usando el cambio de variable $\operatorname{sen}x=t$

$$\operatorname{sen}x=t \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx=dt \quad \Rightarrow \quad \int e^{\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int e^t\cdot t\cdot dt=\left| \begin{matrix} u=t & \Rightarrow & du=dt \\ dv=e^t\,dt & \Rightarrow & v=e^t \end{matrix} \right|=$$

$$=t\cdot e^t-\int e^t\,dt=t\cdot e^t-e^t=e^t(t-1)=e^{\operatorname{sen}x}(\operatorname{sen}x-1)$$

Por lo tanto: $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}x}\ \operatorname{sen}x\cos x\,dx=\left[e^{\operatorname{sen}x}(\operatorname{sen}x-1)\right]_0^{\pi/2}=e(1-1)-e^0(0-1)=1$

- **Integrales Polinómicas Racionales (con división de polinomios)**

Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx$

SOLUCIÓN.

Descomponemos la función racional en suma de fracciones simples:

	1	-2	-2	12
-2		-2	8	-12
	1	-4	6	0

$x^2-4x+6=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}$ $\Rightarrow x^3-2x^2-2x+12=(x+2)(x^2-4x+6)$

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{Ax^2-4Ax+6A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2-4x+6)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-4A+2B+C)x+(6A+2C)}{x^3-2x^2-2x+12}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1 & B=1-A & \Rightarrow B=2\\ -4A+2B+C=11 \Rightarrow & -4A+2-2A-3A=11 & \Rightarrow A=-1\\ 6A+2C=0 & C=-3A & \Rightarrow C=3\end{cases}$$

Se tiene entonces: $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx=\int\frac{-1}{x+2}dx+\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=(1)$

Calculemos cada una de las integrales:

$$\int\frac{-1}{x+2}dx=-\ln|x+2|$$

$$\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4+7}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx+\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx=\ln|x^2-4x+6|+7\int\frac{1}{x^2-4x+6}dx=(2)$$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{1}{(x-2)^2+2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}$$

Por tanto: $(2)=\ln|x^2-4x+6|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1)=-\ln|x+2|+\ln|x^2-4x+6|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$

Es decir: $\int\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx=\ln\left|\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$